Über periodische und asymptotische Lösungen beim n-fachen Pendel in der Ebene

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Ludwig - Maximilians - Universität

zu München

eingereicht am 22. Mai 1938

von

Georgi Bradistilov

aus Panagjarischte (Bulgarien)

München 1938

Berichterstatter: Geheimrat Professor Dr. O. Perron

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Juni 1938

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus „Mathematische Annalen", Band 116, Heft 2

Verlag von Julius Springer in Berlin

§ 1.

Aufstellung der Differentialgleichungen.

Wir betrachten allgemein ein System von n Pendeln, bestehend aus n starren Körpern, die um parallele horizontale Achsen drehbar sind, und zwar der erste um eine feste Achse O, der zweite um eine Achse O_1 des ersten Körpers usw. Der Schwerpunkt des ersten Körpers S_1 liege auf der Geraden OO_1, derjenige des zweiten Körpers S_2 auf der Geraden O_1O_2 usw., und zwar jeweils $O_{\nu-1}$ nicht zwischen S_ν und O_ν.

Sind x_ν, y_ν die Koordinaten des Schwerpunktes S_ν des ν-ten Pendels mit der Masse m_ν in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit der positiven y-Achse nach unten, ist $a_\nu = \overline{O_{\nu-1}S_\nu}$, $b_\nu = \overline{O_{\nu-1}O_\nu}$ und φ_ν der Winkel zwischen der Richtung $\overrightarrow{O_{\nu-1}S_\nu}$ und der positiven y-Achse, so sind die a_ν, b_ν positiv und es bestehen die Gleichungen[1])

$$(1)\qquad \begin{cases} x_\nu = a_\nu \sin\varphi_\nu + \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k \sin\varphi_k, \\ y_\nu = a_\nu \cos\varphi_\nu + \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k \cos\varphi_k, \end{cases} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

und

$$\begin{aligned} x'_\nu &= a_\nu \cos\varphi_\nu \cdot \varphi'_\nu + \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k \cos\varphi_k \cdot \varphi'_k, \\ y'_\nu &= -a_\nu \sin\varphi_\nu \cdot \varphi'_\nu - \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k \sin\varphi_k \cdot \varphi'_k, \end{aligned} \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

---

[1]) Leere Summen $\sum_{k=n+1}^{n}$, $\sum_{k=1}^{0}$ sind stets gleich Null.

Wir bezeichnen mit J_ν das Trägheitsmoment des ν-ten Pendels in bezug auf seinen Schwerpunkt und setzen

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} A_\nu &= a_\nu^2 m_\nu + b_\nu^2 \sum_{k=\nu+1}^{n} m_k, \\ B_\nu &= a_\nu m_\nu + b_\nu \sum_{k=\nu+1}^{n} m_k, \end{aligned}\right. \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Wir sehen leicht ein, daß die kinetische und potentielle Energie des Pendelsystems durch die Ausdrücke

$$(3)\qquad T = \sum_{\nu=1}^{n} T_\nu = \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} [J_\nu \varphi_\nu'^2 + m_\nu (x_\nu'^2 + y_\nu'^2)]$$
$$= \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} [2 B_\nu \varphi_\nu' \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k \cos(\varphi_\nu - \varphi_k) \cdot \varphi_k' + (A_\nu + J_\nu) \varphi_\nu'^2]$$

und

$$(4)\qquad U = -g \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu \cos \varphi_\nu$$

gegeben sind.

Daraus folgt das Integral der lebendigen Kraft:

$$(5)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} [2 B_\nu \varphi_\nu' \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k \cos(\varphi_\nu - \varphi_k) \cdot \varphi_k' + (A_\nu + J_\nu) \varphi_\nu'^2] = 2g \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu \cos \varphi_\nu + h.$$

Wegen (3) und (4) und bei Berücksichtigung der Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_\nu'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_\nu} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

erhalten wir die folgenden Bewegungsgleichungen des Systems

$$(6)\qquad \begin{aligned} &B_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k [\cos(\varphi_\nu - \varphi_k) \cdot \varphi_k'' + \sin(\varphi_\nu - \varphi_k) \cdot \varphi_k'^2] + (A_\nu + J_\nu) \varphi_\nu'' \\ &+ b_\nu \sum_{k=\nu+1}^{n} B_k [\cos(\varphi_\nu - \varphi_k) \cdot \varphi_k'' + \sin(\varphi_\nu - \varphi_k) \cdot \varphi_k'^2] = -g B_\nu \sin \varphi_\nu, \\ &(\nu = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Wenn wir in dieser Gleichung $J_\nu = 0$ setzen, erhalten wir die Bewegungsgleichungen des n-fachen mathematischen Pendels, bei welchem die einzelnen Pendel in beliebigen Punkten der Verbindungsstrecken aufgehängt sind:

$$(6a)\qquad \begin{aligned} &B_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k [\cos(\varphi_\nu - \varphi_k) \cdot \varphi_k'' + \sin(\varphi_\nu - \varphi_k) \cdot \varphi_k'^2] + A_\nu \varphi_\nu'' \\ &+ b_\nu \sum_{k=\nu+1}^{n} B_k [\cos(\varphi_\nu - \varphi_k) \cdot \varphi_k'' + \sin(\varphi_\nu - \varphi_k) \cdot \varphi_k'^2] = -g B_\nu \sin \varphi_\nu, \\ &(\nu = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Setzen wir schließlich in Gleichung (6a) $a_\nu = b_\nu$, so erhalten wir die Bewegungsgleichungen für n aneinander hängende Pendel:

$$\text{(6b)}\qquad \boxed{\begin{aligned} &M_\nu \sum_{k=1}^{\nu} a_k[\cos(\varphi_\nu - \varphi_k)\cdot\varphi_k'' + \sin(\varphi_\nu - \varphi_k)\cdot\varphi_k'^2] \\ &+ \sum_{k=\nu+1}^{n} M_k a_k[\cos(\varphi_\nu - \varphi_k)\cdot\varphi_k'' + \sin(\varphi_\nu - \varphi_k)\cdot\varphi_k'^2] = -M_\nu g \sin\varphi_\nu, \\ &\qquad\qquad (\nu = 1, \ldots, n), \end{aligned}}$$

wobei $M_\nu = \sum_{k=\nu}^{n} m_k$.

Von hier ab werden wir uns mit dem System von physischen Pendeln, also mit den Gleichungen (6) beschäftigen, weil alle Ergebnisse, welche wir für dieses System erhalten, sofort durch Spezialisierung auf die beiden Systeme von mathematischen Pendeln (6a) und (6b) zu übertragen sind. Es ist nur nötig, entsprechend $J_\nu = 0$ bzw. auch noch $a_\nu = b_\nu$ zu setzen.

Die Gleichungen (6) lassen sofort erkennen, daß, wenn das Pendelsystem bei seiner Bewegung zweimal durch die Gleichgewichtslage geht, die Bewegung periodisch wird, d. h. die Lösung der Gleichungen (6), die diese Bewegung darstellt, wird periodisch. In der Tat bleiben die Gleichungen (6) unverändert, wenn man φ_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$, t durch $-\varphi_\nu$, $2\omega - t$ ersetzt, wo ω eine beliebige Konstante ist. Wenn also die Gleichungen $\varphi_\nu = \Phi_\nu(t)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ eine Lösung von (6) darstellen, so stellen die Gleichungen $\varphi_\nu = -\Phi_\nu(2\omega - t)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ ebenfalls eine dar. Wenn das Pendelsystem etwa für $t = 0$ und $t = \omega$ durch die Gleichgewichtslage geht, so ist

$$\Phi_\nu(0) = 0, \quad \Phi_\nu(\omega) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

und die Formeln

$$\begin{aligned} &\varphi_\nu(t) = \Phi_\nu(t) && \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq \omega, \\ &\varphi_\nu(t) = -\Phi_\nu(2\omega - t) && \text{für} \quad \omega \leqq t \leqq 2\omega, \end{aligned} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

stellen eine periodische Lösung dar mit der Periode 2ω; die Bewegung des Pendelsystems hat die y-Achse zur Symmetrieachse. Diese Bemerkung wird zum Existenzbeweis der periodischen Lösungen von (6) dienen.

Setzen wir nun[2])

$$\varphi_\nu = \lambda\psi_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

[2]) Wir befolgen hier eine Methode des Herrn Perron: Neuer Existenzbeweis für periodische Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem, Monatsh. für Mathematik und Physik **43**, S. 81.

wo λ ein Parameter ist, so gehen die Gleichungen (5) und (6) über in:

$$(7)\quad \sum_{\nu=1}^{n} [2 B_\nu \lambda^2 \psi'_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k \cos \lambda(\psi_\nu - \psi_k) \cdot \psi'_k + \lambda^2 (A_\nu + J_\nu) \psi'^2_\nu] = 2g \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu \cos \lambda \psi_\nu + h$$

und

$$(8)\quad B_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k [\cos \lambda(\psi_\nu - \psi_k) \cdot \psi''_k + \lambda \sin \lambda(\psi_\nu - \psi_k) \cdot \psi'^2_k] + (A_\nu + J_\nu) \psi''_\nu + b_\nu \sum_{k=\nu+1}^{n} B_k [\cos \lambda(\psi_\nu - \psi_k) \cdot \psi''_k + \lambda \sin \lambda(\psi_\nu - \psi_k) \cdot \psi'^2_k] = -g B_\nu \psi_\nu + \lambda g B_\nu \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{2n-3} \psi_\nu^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Speziell für $\lambda = 0$ ist (8) ein lineares System:

$$(9)\quad B_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k \psi''_k + (A_\nu + J_\nu) \psi''_\nu + b_\nu \sum_{k=\nu+1}^{n} B_k \psi''_k = -g B_\nu \psi_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

§ 2.

Die charakteristische Gleichung.

Um ein Fundamentalsystem von (9) zu finden, setzen wir

$$\psi_\nu = L_\nu e^{\varrho t} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ein, und nachdem wir den gemeinsamen Faktor beseitigt haben, erhalten wir die Bedingungen, die von L_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) und ϱ erfüllt werden müssen:

$$(10)\quad B_\nu \varrho^2 \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k L_k + [(A_\nu + J_\nu) \varrho^2 + g B_\nu] L_\nu + b_\nu \varrho^2 \sum_{k=\nu+1}^{n} B_k L_k = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Durch Elimination von L_ν erhalten wir die charakteristische Gleichung des Systems:

$$(11)\quad \begin{vmatrix} (A_1 + J_1)\varrho^2 + gB_1 & b_1 B_2 \varrho^2 & \ldots & b_1 B_n \varrho^2 \\ b_1 B_2 \varrho^2 & (A_2 + J_2)\varrho^2 + gB_2 & \ldots & b_2 B_n \varrho^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_1 B_n \varrho^2 & b_2 B_n \varrho^2 & \ldots & (A_n + J_n)\varrho^2 + gB_n \end{vmatrix} = 0.$$

Setzen wir

$$\varrho^2 = \frac{g}{u},$$

so erhalten wir

$$\begin{vmatrix} A_1 + J_1 + B_1 u & b_1 B_2 & \dots & b_1 B_n \\ b_1 B_2 & A_2 + J_2 + B_2 u & \dots & b_2 B_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 B_n & b_2 B_n & \dots & A_n + J_n + B_n u \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Das ist, weil die a_ν, b_ν, also auch die B_ν positiv sind, eine verallgemeinerte Säkulargleichung, so daß alle Wurzeln dieser Gleichung reell sind[3]).

Jetzt werden wir zeigen, daß alle Wurzeln von Gleichung (12) negativ sind.

Die Gleichung (12) kann in der Form

$$B_1 \dots B_n u^n + S_1 u^{n-1} + \dots + S_n = 0 \tag{13}$$

geschrieben werden, wo S_ν die Summe aller Hauptminoren ν-ten Grades der Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1 + J_1 & b_1 B_2 & \dots & b_1 B_n \\ b_1 B_2 & A_2 + J_2 & \dots & b_2 B_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 B_n & b_2 B_n & \dots & A_n + J_n \end{vmatrix}, \tag{14}$$

jeder mit einem positiven Faktor multipliziert, ist.

Um festzustellen, daß alle Wurzeln von Gleichung (13) negativ sind, genügt es zu zeigen, daß die Koeffizienten dieser Gleichung $\geqq 0$ sind und speziell S_n sogar > 0. Diese Koeffizienten sind aber sicher $\geqq 0$ und S_n sogar > 0, wenn die Determinante (14) positiv ist und alle ihre Hauptminoren $\geqq 0$ sind.

Zunächst werden wir zeigen, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1 & b_1 B_2 & \dots & b_1 B_n \\ b_1 B_2 & A_2 & \dots & b_2 B_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 B_n & b_2 B_n & \dots & A_n \end{vmatrix}, \tag{15}$$

die aus (14) durch Beseitigung von $J_1, J_2, \dots, J_n$ hervorgeht, positiv ist und alle ihre Hauptminoren $\geqq 0$ sind.

Genau die gleiche Determinante (15) erhält man, wenn man die folgende

$$\begin{vmatrix} a_1\sqrt{m_1} & b_1\sqrt{m_2} & b_1\sqrt{m_3} & \dots & b_1\sqrt{m_n} \\ 0 & a_2\sqrt{m_2} & b_2\sqrt{m_3} & \dots & b_2\sqrt{m_n} \\ 0 & 0 & a_3\sqrt{m_3} & \dots & b_3\sqrt{m_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n\sqrt{m_n} \end{vmatrix} \tag{15a}$$

[3]) Siehe Perron, Algebra Bd. II, 2. Aufl., Satz 13.

quadriert und dabei die Multiplikation zeilenweise durchführt. Daraus folgt, daß die Determinante (15) positiv ist.

Ein jeder Hauptminor der Determinante (15) hat die Form

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} A_p & b_p B_q & b_p B_r & \dots & b_p B_l \\ b_p B_q & A_q & b_q B_r & \dots & b_q B_l \\ b_p B_r & b_q B_r & A_r & \dots & b_r B_l \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_p B_l & b_q B_l & b_r B_l & \dots & A_l \end{vmatrix} \quad (p < q < r < \dots < l).$$

Aber diese Determinante stellt genau das symbolische Quadrat derjenigen Matrix dar, die man aus (15a) erhält, wenn man nur die Zeilen mit den Nummern $p, q, r, \dots, l$ beibehält; sie läßt sich also als Summe von lauter Quadraten darstellen. Daraus folgt, daß die Determinante (16) gewiß $\geqq 0$ ist.

Also sind alle Hauptminoren der Determinante (15) $\geqq 0$.

Nun ist sofort zu sehen, daß die Determinante, die aus (16) durch Addition von nichtnegativen Gliedern $J_1, J_2, \dots, J_n$ zu den Elementen ihrer Hauptdiagonale hervorgeht, ebenfalls $\geqq 0$ ist und speziell S_n sogar > 0. Dazu genügt es, diese Determinante nach den J_ν $(\nu = 1, \dots, n)$ zu entwickeln, wobei die verschiedenen Koeffizienten dieser Entwicklung entsprechend die Hauptminoren eines bestimmten Grades der Determinante (15) darstellen, die, wie oben gezeigt wurde, $\geqq 0$ sind.

Folglich besitzt die Gleichung (13) nur negative Wurzeln.

Gleichung (11) besitzt also nur rein imaginäre Wurzeln, die wir mit

$$\pm i\varrho_1, \dots, \pm i\varrho_n$$

bezeichnen. *Wir nehmen an, daß sie alle voneinander verschieden sind.*

Das System (9) hat das folgende Fundamentalsystem von Integralen:

$$\begin{aligned} &\psi_{1\mu} = L_{1\mu} e^{i\varrho_\mu t}, \quad \dots, \ \psi_{n\mu} = L_{n\mu} e^{i\varrho_\mu t}, \\ &\psi_{1p} = L_{1\mu} e^{-i\varrho_\mu t}, \dots, \ \psi_{np} = L_{n\mu} e^{-i\varrho_\mu t}, \end{aligned} \qquad (\mu = 1, \dots, n; \quad p = \mu + n),$$

wo $L_{1\mu}, \dots, L_{n\mu}$ dem Gleichungssystem

$$(10\,a) \quad B_\nu \varrho_\mu^2 \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k L_{k\mu} + [(A_\nu + J_\nu)\varrho_\mu^2 - g B_\nu] L_{\nu\mu} + b_\nu \varrho_\mu^2 \sum_{k=\nu+1}^{n} B_k L_{k\mu} = 0 \qquad (\nu = 1, \dots, n)$$

genügen.

Folglich ist das allgemeine Integral des linearen Systems (9) folgendes:

$$(17) \qquad \begin{cases} \psi_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} L_{\nu\mu}(C_\mu \cos \varrho_\mu t + D_\mu \sin \varrho_\mu t), \\ \psi_\nu' = \sum_{\mu=1}^{n} L_{\nu\mu}(-C_\mu \varrho_\mu \sin \varrho_\mu t + D_\mu \varrho_\mu \cos \varrho_\mu t), \end{cases} \qquad (\nu = 1, \dots, n).$$

Wir zeigen jetzt, daß die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_{11} \dots L_{1n} \\ \dots\dots \\ L_{n1} \dots L_{nn} \end{vmatrix}$$

verschieden von Null ist. In der Tat bilden die partikulären Integrale

$$L_{1\mu} e^{-i\varrho_\mu t}, \dots, L_{n\mu} e^{-i\varrho_\mu t}, \quad L_{1\mu} e^{i\varrho_\mu t}, \dots, L_{n\mu} e^{i\varrho_\mu t}$$

gemeinsam mit den ersten Ableitungen nach t ein Fundamentalsystem der Gleichungen (9). Folglich ist die aus diesen Integralen gebildete Determinante

$$i^n \begin{vmatrix} L_{11} e^{-i\varrho_1 t} & \dots & L_{1n} e^{-i\varrho_n t} & L_{11} e^{i\varrho_1 t} & \dots & L_{1n} e^{i\varrho_n t} \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ L_{n1} e^{-i\varrho_1 t} & \dots & L_{nn} e^{-i\varrho_n t} & L_{n1} e^{i\varrho_1 t} & \dots & L_{nn} e^{i\varrho_n t} \\ -\varrho_1 L_{11} e^{-i\varrho_1 t} & \dots & -\varrho_n L_{1n} e^{-i\varrho_n t} & \varrho_1 L_{11} e^{i\varrho_1 t} & \dots & \varrho_n L_{1n} e^{i\varrho_n t} \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ -\varrho_1 L_{n1} e^{-i\varrho_1 t} & \dots & -\varrho_n L_{nn} e^{-i\varrho_n t} & \varrho_1 L_{n1} e^{i\varrho_1 t} & \dots & \varrho_n L_{nn} e^{i\varrho_n t} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden. Wenn wir aber die gemeinsamen Faktoren dieser Determinante beseitigen, können wir durch Addition der $(n+1)$-ten Spalte zur ersten Spalte, der $(n+2)$-ten Spalte zur zweiten usw., leicht einsehen, daß die Determinante gleich

$$(2i)^n \varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_n \begin{vmatrix} L_{11} \dots L_{1n} \\ \dots\dots \\ L_{n1} \dots L_{nn} \end{vmatrix}^2 = (2i)^n \varrho_1 \dots \varrho_n \Delta^2$$

ist. Daraus folgt, daß die Determinante Δ von Null verschieden ist.

§ 3.

Periodische Lösungen durch die stabile Gleichgewichtslage.

Jetzt betrachten wir speziell das Partikulärintegral von (9)

$$(18) \qquad \begin{cases} \psi_\nu = L_{\nu 1} \sin \varrho_1 t, \\ \psi_\nu' = L_{\nu 1} \varrho_1 \cos \varrho_1 t, \end{cases} \qquad (\nu = 1, \dots, n)$$

mit den Anfangswerten

$$\psi_\nu(0) = 0, \quad \psi_\nu'(0) = L_{\nu 1} \varrho_1.$$

Das Integral von (8) mit den modifizierten Anfangswerten

$$\begin{aligned} \psi_\nu(0) &= 0, \\ \psi_\nu'(0) &= L_{\nu 1} \varrho_1 + \sum_{k=2}^{n} L_{\nu k} \varrho_k \alpha_k, \end{aligned} \qquad (\nu = 1, \dots, n)$$

hat die Form

$$(19)\qquad \begin{cases} \psi_\nu = \psi_\nu(t, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \lambda), \\ \psi'_\nu = \psi'_\nu(t, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \lambda), \end{cases}$$

wo die rechten Seiten sich nach Poincaré bekanntlich in Potenzreihen in bezug auf $\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \lambda$ entwickeln lassen.

Dabei ist

$$(20)\qquad \begin{cases} \psi_\nu(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \lambda) = 0, \\ \psi'_\nu(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \lambda) = L_{\nu 1}\varrho_1 + \sum_{k=2}^{n} L_{\nu k}\varrho_k \alpha_k, \end{cases} \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Aus (17) entnimmt man speziell für $\lambda = 0$

$$(21)\qquad \psi_\nu(t, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0) = L_{\nu 1}\sin\varrho_1 t + \sum_{k=2}^{n} L_{\nu k}\sin\varrho_k t \cdot \alpha_k.$$

Das Integral (18) hat die Periode $\frac{2\pi}{\varrho_1}$. Das Integral (19) wird für hinreichend kleine Werte von $|\lambda|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_n|$ nach § 1 die modifizierte Periode $\frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1}$ haben, wenn

$$(22)\qquad \psi_\nu\left(\frac{\pi+\delta}{\varrho_1}, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \lambda\right) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ist.

Es handelt sich nun darum zu zeigen, daß aus den n Gleichungen (22) die n Unbekannten $\delta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sich eindeutig als Funktion von λ bestimmen lassen. Setzen wir $\omega_k = \frac{\pi\varrho_k}{\varrho_1}$, so werden für $t = 0$ die Potenzentwicklungen nach $\delta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \lambda$ der Gleichungen (22) mit Rücksicht auf (21) die folgenden sein:

$$(23)\qquad -L_{\nu 1}\delta + \sum_{k=2}^{n} L_{\nu k}\sin\omega_k \cdot \alpha_k + f_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

wo die f_ν Potenzentwicklungen nach $\lambda, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \delta$ darstellen. In f_ν sind die Glieder ohne den Faktor λ wenigstens von zweiter Dimension.

Für $\lambda = 0$ haben die Gleichungen (23) die Lösung

$$\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \delta = 0.$$

Um ihre Lösbarkeit für kleine Werte von $|\lambda|$ sicherzustellen, müssen wir ihre Funktionaldeterminante nach $\delta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ für das Wertsystem $\delta = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \lambda = 0$ berechnen. Diese ist gleich

$$\Phi = \begin{vmatrix} -L_{11} & L_{12}\sin\omega_2 & \ldots & L_{1n}\sin\omega_n \\ -L_{21} & L_{22}\sin\omega_2 & \ldots & L_{2n}\sin\omega_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -L_{n1} & L_{n2}\sin\omega_2 & \ldots & L_{nn}\sin\omega_n \end{vmatrix}.$$

oder

$$\Phi = -\sin\omega_2 \dots \sin\omega_n \cdot \begin{vmatrix} L_{11} & \dots & L_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & \dots & L_{nn} \end{vmatrix} = -\sin\omega_2 \dots \sin\omega_n \cdot \Delta.$$

Dieser Wert ist verschieden von Null, wenn $\omega_2, \dots, \omega_n$ keine Multipla von π sind, wenn also $f_2, \dots, f_n$ keine Multipla von ϱ_1 sind. Das ist also eine hinreichende Bedingung dafür, daß eine Schar periodischer Lösungen existiert, deren Periode annähernd gleich $\frac{2\pi}{\varrho_1}$ ist, d. h. für $\lambda \to 0$ gegen $\frac{2\pi}{\varrho_1}$ konvergiert.

Durch Ersetzen von ϱ_1 durch $\varrho_2, \dots, \varrho_n$ erhalten wir auch noch $n-1$ Lösungsscharen, die ebenfalls von nur einem Parameter abhängen. Dabei muß vorausgesetzt werden, daß keine der Zahlen $\frac{\varrho_u}{\varrho_v}$ ganzzahlig ist.

§ 4.

Spezialfall $n = 2$.

Bei den in § 3 nachgewiesenen periodischen Bewegungen haben die Anfangsgeschwindigkeiten der einzelnen Pendelschwerpunkte die Vertikalkomponente Null; die Horizontalkomponente ist beim ν-ten Pendel gleich

$$a_\nu \varphi_\nu'(0) + \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k \varphi_k'(0) = \lambda [a_\nu \psi_\nu'(0) + \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k \psi_k'(0)].$$

Wir wollen jetzt speziell im Fall $n = 2$ das Verhältnis der beiden Horizontalkomponenten und der beiden Winkelgeschwindigkeiten $\varphi_1'(0)$, $\varphi_2'(0)$ zueinander genauer untersuchen, wobei wir uns der Einfachheit halber auf den Fall des mathematischen Pendels (also $J_\nu = 0$, $a_\nu = b_\nu$) beschränken.

Die Gleichung (12) lautet dann, wenn man in jeder Zeile die gemeinsamen Faktoren unterdrückt:

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)(a_1 + u) & a_2 m_2 \\ a_1 & a_2 + u \end{vmatrix} = 0.$$

Die Wurzeln sind

$$u_1 = -\frac{a_1 + a_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2},$$

$$u_2 = -\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2}$$

und

$$\varrho_1 = \sqrt{\frac{g}{-u_1}}, \qquad \varrho_2 = \sqrt{\frac{g}{-u_2}}.$$

Außerdem ist

$$L_{1k} = a_2 + u_k, \quad L_{2k} = -a_1 \qquad (k = 1, 2),$$

wobei wir einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor, der schließlich durch den Parameter λ absorbiert würde, unterdrückt haben.

Es ist $|u_1| < |u_2|$, daher $\varrho_1 > \varrho_2$. Daher kann gewiß ϱ_2 kein Vielfaches von ϱ_1 sein, und folglich existiert sicher die periodische Lösungsschar mit annähernd der Periode $\frac{2\pi}{\varrho_1}$. Im allgemeinen wird auch die zweite Lösungsschar mit annähernd der Periode $\frac{2\pi}{\varrho_2}$ existieren; das ist dann eine langsamere Schwingung als die erste. Nur in dem Ausnahmefall, daß $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ eine ganze Zahl ist, kann die Existenz der zweiten Schar nicht garantiert werden, also im Falle

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1+m_2} a_1 a_2}}{\frac{a_1+a_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1+m_2} a_1 a_2}} = \text{ganze Quadratzahl},$$

d. h.

$$\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 a_1 a_2}} \left(\frac{a_1+a_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1 a_1 a_2}{m_1+m_2}}\right) = \text{ganze Zahl}.$$

α) *Schar periodischer Bewegungen abhängig von u_1 (die schnellere Schwingung).*

Nach (20) ist

$$\psi_1'(0) = (a_2 + u_1)\,\varrho_1 + (a_2 + u_2)\,\varrho_2\,\alpha_2,$$
$$\psi_2'(0) = -\alpha_1 \varrho_1 - a_1\,\varrho_2\,\alpha_2.$$

Da aber α_2 mit λ zugleich gegen Null geht, so ist

$$\varphi_1'(0) = \lambda\,\psi_1'(0) = \lambda\,(a_2 + u_1)\,\varrho_1 + o(\lambda),$$
$$\varphi_2'(0) = \lambda\,\psi_2'(0) = -\lambda\,a_1\,\varrho_1 + o(\lambda),$$

wo $o(\lambda)$ das bekannte Größenordnungssymbol bezeichnet. [Richtig wäre auch $O(\lambda^2)$].

Dann erhalten wir für den Quotienten der Winkel φ_1^0 und φ_2^0, welche für $\lambda \to 0$ und nach dem Anfangsmoment die beiden Pendel mit der positiven y-Achse bilden, folgende Ungleichungen:

$$\frac{\varphi_1^0}{\varphi_2^0} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\varphi_1'(0)}{\varphi_2'(0)} = \frac{\frac{a_1-a_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1+m_2} a_1 a_2}}{a_1} \begin{cases} < 0, \\ > -\frac{a_2}{a_1}. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen zeigen, daß in diesem Falle die beiden Pendel nach entgegengesetzter Richtung aus der Vertikalen herausgehen. Wenn $a_1 > a_2$ ist, dann $|\varphi_1^0| < |\varphi_2^0|$. Dagegen, wenn $a_1 < a_2$ ist, so ist $|\varphi_1^0| \gtrless |\varphi_2^0|$ möglich.

Um zu sehen, welche die Massen m_1 und m_2 der beiden Pendel gegen die Gleichgewichtslage haben, genügt es, das Verhältnis für $\lambda \to 0$ der Hori-

zontalkomponenten der Anfangsgeschwindigkeiten s_1^0 und s_2^0, welche die Punkte m_1 und m_2 haben, zu untersuchen. Also

$$\frac{s_1^0}{s_2^0} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{a_1 \varphi_1'(0)}{a_1 \varphi_1'(0) + a_2 \varphi_2'(0)} = \frac{a_2 + u_1}{u_1} < 0,$$

weil $u_1 < 0$ und

$$a_2 + u_1 = \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2} + \frac{a_2 - a_1}{2} > 0.$$

Diese Ungleichungen zeigen, daß s_1^0 und s_2^0 entgegengesetzt sind, d. h. die Massen m_1 und m_2 gehen nach entgegengesetzten Seiten aus der Gleichgewichtslage heraus (Fig. 1).

β) Schar periodischer Bewegungen abhängig von u_2 (die langsamere Schwingung).

In derselben Weise wie in α) erhalten wir hier

$$\frac{\varphi_1^0}{\varphi_2^0} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\varphi_1'(0)}{\varphi_2'(0)} = \frac{\frac{a_1 - a_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2}}{a_1} \begin{cases} < 1, \\ > 0. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen zeigen, daß in diesem Falle die beiden Pendel nach gleichen Richtungen aus der Vertikalen und aus der Gleichgewichtslage herausgehen.

Außerdem ist auch

$$|\varphi_1^0| < |\varphi_2^0| \quad \text{(Fig. 2)}.$$

Wenn die Masse m_1 im Verhältnis zu m_2 gering ist, dann sind φ_1^0 und φ_2^0 fast gleich. Wenn dagegen m_2 im Verhältnis zu m_1 gering ist und wenn $a_1 < a_2$, dann ist φ_1^0 im Verhältnis zu φ_2^0 sehr klein.

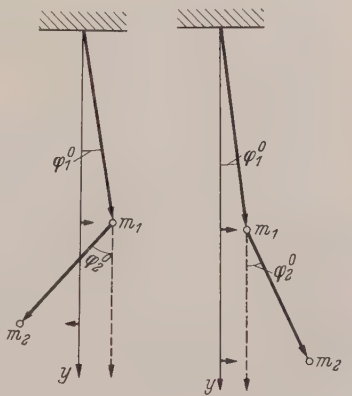

Fig. 1. Fig. 2.

§ 5.

Periodische und asymptotische Bewegungen in der Nähe einer instabilen Gleichgewichtslage.

I. Periodische Bewegungen.

Jetzt werden wir untersuchen, ob periodische Bewegungen des Pendelsystems existieren können, bei denen einige Pendel nach oben gerichtet bleiben.

Allgemeiner Fall: *p Pendel sind nach unten und q Pendel nach oben gerichtet, wobei $p + q = n$.*

Wir setzen in den Gleichungen (6)

$$(24)\qquad \begin{cases} \varphi_{r_p} = \lambda\, \psi_{r_p}, \\ \varphi_{r_q} = \pi + \lambda\, \psi_{r_q} \end{cases}$$

ein, wo r_p und r_q entsprechend p bzw. q verschiedene Werte annehmen, und erhalten

$$(25)\quad \begin{aligned} &\varepsilon_\nu B_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} \varepsilon_k b_k [\cos\lambda(\psi_\nu - \psi_k)\cdot \psi_k'' + \lambda \sin\lambda(\psi_\nu - \psi_k)\cdot \psi_k'^2] + (A_\nu + J_\nu)\psi_\nu'' \\ &\quad + \varepsilon_\nu b_\nu \sum_{k=\nu+1}^{n} \varepsilon_k B_k [\cos\lambda(\psi_\nu - \psi_k)\cdot \psi_k'' + \lambda \sin\lambda(\psi_\nu - \psi_k)\cdot \psi_k'^2] \\ &= \varepsilon_\nu \Big[- g B_\nu \psi_\nu + \lambda g B_\nu \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{2n-3} \psi_\nu^{2n-1}}{(2n-1)!} \Big], \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon_{r_p} = 1$, $\varepsilon_{r_q} = -1$. Das System (25) unterscheidet sich von (8) nur dadurch, daß b_ν und B_ν durch $\varepsilon_\nu b_\nu$ und $\varepsilon_\nu B_\nu$ ersetzt sind. Die weitere Behandlung ist daher analog. Speziell das lineare System (9) geht über in:

$$(26)\qquad \varepsilon_\nu B_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} \varepsilon_k b_k \psi_k'' + (A_\nu + J_\nu)\psi_\nu'' + \varepsilon_\nu b_\nu \sum_{k=\nu+1}^{n} \varepsilon_k B_k \psi_k'' = -\varepsilon_\nu g B_\nu \psi_\nu.$$

Die charakteristische Gleichung (11) geht, wenn man noch die Spalten und Zeilen der Reihe nach mit $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ multipliziert, über in:

$$(27)\qquad \begin{vmatrix} (A_1 + J_1)\varrho^2 + \varepsilon_1 g B_1 & b_1 B_2 \varrho^2 & \ldots & b_1 B_n \varrho^2 \\ b_1 B_2 \varrho^2 & (A_2 + J_2)\varrho^2 + \varepsilon_2 g B_2 & \ldots & b_2 B_n \varrho_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_1 B_n \varrho^2 & b_2 B_n \varrho^2 & \ldots & (A_n + J_n)\varrho^2 + \varepsilon_n g B_n \end{vmatrix} = 0,$$

oder wenn man wieder $\frac{g}{\varrho^2} = u$ setzt:

$$(28)\qquad \begin{vmatrix} A_1 + J_1 + \varepsilon_1 B_1 u & b_1 B_2 & \ldots & b_1 B_n \\ b_1 B_2 & A_2 + J_2 + \varepsilon_2 B_2 u & \ldots & b_2 B_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_1 B_n & b_n B_n & \ldots & A_n + J_n + \varepsilon_n B_n u \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von (12) nur dadurch, daß die Vorzeichen vor u in den Gliedern der Hauptdiagonale entsprechend geändert sind: p Vorzeichen sind positiv und q sind negativ.

Aber es kann sein, daß die Gleichung (28) nicht nur negative Wurzeln, sondern auch positive und imaginäre Wurzeln besitzt. Ich vermute, daß die Anzahl der negativen Wurzeln nur noch $p - 2k$ ist, wo k eine ganze Zahl $\geqq 0$ ist. Der Beweis scheint mir schwierig zu sein.

Ist p ungerade, so ist klar, daß wenigstens eine negative Wurzel der Gleichung (28) existiert. Denn das konstante Glied ist positiv und der höchste Koeffizient hat das Vorzeichen $(-1)^q = (-1)^{n-p}$. Die anderen Wurzeln dieser Gleichung können auch teils positiv reell, teils imaginär sein.

Wenn die charakteristische Gleichung (27) ein Paar konjugierter rein imaginärer Wurzeln $\pm i\varrho_k$ besitzt und wenn keine andere Wurzel ein ganzzahliges Multiplum von $i\varrho_k$ ist und wenn alle Wurzeln voneinander verschieden sind, so kann man zeigen, daß eine Schar von Schwingungen existiert, bei welchen alle n Pendel immer in einem Gebiet um die vertikale Lage bleiben und deren Periode nahezu gleich $\frac{2\pi}{\varrho_k}$ ist. Die Rechnung ist genau die gleiche wie in § 3. Insbesondere ergibt sich in Analogie zu der Formel (20) die folgende später zu benutzende Formel:

$$(29)\quad \begin{cases} \psi_\nu(0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n, \lambda) = 0, \\ \psi'_\nu(0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n, \lambda) = L_{\nu k}\varrho_k + \sum_{\mu=1}^{n}{}' L_{\nu\mu}\varrho_\mu\alpha_\mu, \\ (\nu = 1, \ldots, n), \end{cases}$$

wo der Akzent der Σ' andeutet, daß bei der Summation nach μ der Wert $\mu = k$ auszulassen ist. Im übrigen mag die Wiederholung der Rechnung unterbleiben.

Sonderfall a: *Alle Pendel sind nach oben gerichtet.*

Hier ist $p = 0$ und $q = n$. Dann ist die Gleichung (28) die folgende:

$$(30)\quad \begin{vmatrix} A_1 + J_1 - B_1 u & b_1 B_2 & \ldots & b_1 B_n \\ b_1 B_2 & A_2 + J_2 - B_2 u & \ldots & b_2 B_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_1 B_n & b_2 B_n & \ldots & A_n + J_n - B_n u \end{vmatrix} = 0.$$

Sie besitzt, wie sich aus § 2 ergibt, nur positive Wurzeln. Folglich besitzt die charakteristische Gleichung (27) keine rein imaginäre Wurzel. Daher existiert in diesem Falle keine periodische Schwingung, also keine, bei der alle Pendel nach oben gerichtet und in einem Gebiet in der Nähe der instabilen Gleichgewichtslage bleiben[4]).

Sonderfall b: *Ein beliebiges Pendel bleibt nach unten gerichtet, während alle übrigen Pendel nach oben gerichtet bleiben.*

Einfachheitshalber wollen wir annehmen, daß das n-te Pendel nach unten gerichtet bleibt.

Hier ist $p = 1$ und $q = n - 1$. Die Gleichung (28) ist die folgende

$$(31)\quad \begin{vmatrix} A_1 + J_1 - B_1 u & b_1 B_2 & \ldots & b_1 B_n \\ b_1 B_2 & A_2 + J_2 - B_2 u & \ldots & b_2 B_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_1 B_n & b_2 B_n & & A_n + J_n + B_n u \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung besitzt wenigstens eine negative Wurzel (und, falls meine obige Vermutung zutrifft, auch *nur* eine). Also wird die charakteristische

[4]) Siehe E. Picard, Traité d'Analyse, Bd. III, II. édition, S. 181—186.

Gleichung für ϱ zwei konjugierte rein imaginäre Wurzeln $\pm i\varrho_k$ besitzen. Daraus folgt, daß, wenn keine andere Wurzel ein Multiplum von $i\varrho_k$ ist, also insbesondere, wenn meine Vermutung zutrifft, und wenn alle Wurzeln voneinander verschieden sind, eine Schar periodischer Lösungen existiert.

Sonderfall c: *Ein beliebiges Pendel ist nach oben, die übrigen sind nach unten gerichtet.*

Einfachheitshalber wollen wir auch annehmen, daß das n-te Pendel nach oben gerichtet ist.

Hier ist $p = n - 1$ und $q = 1$. Die Gleichung (28) ist die folgende:

$$(32) \qquad \begin{vmatrix} A_1 + J_1 + B_1 u & b_1 B_2 & \dots & b_1 B_n \\ b_1 B_2 & A_2 + J_2 + B_2 u & \dots & b_2 B_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 B_n & b_2 B_n & \dots & A_n + J_n - B_n u \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung hat offenbar wenigstens eine positive Wurzel, und diese ist, wenn meine Vermutung stimmt, die einzige positive Wurzel.

Es ist leicht einzusehen, daß bei einem geraden n unbedingt eine negative Wurzel existiert[5]). Dann gibt es also ein Paar konjugierter rein imaginärer Wurzeln $\pm i\varrho_k$, und falls keine andere ein ganzzahliges Multiplum von $i\varrho_k$ ist und alle Wurzeln voneinander verschieden sind, existiert daher wenigstens eine Schar periodischer Schwingungen, bei welcher $n - 1$ Pendel nach unten gerichtet bleiben und eines nach oben. Die Anzahl solcher Scharen von Schwingungen kann höchstens $n - 1$ sein.

II. Asymptotische Bewegungen.

Jetzt wollen wir noch untersuchen, ob asymptotische Bewegungen des Pendelsystems in der Nähe einer instabilen Gleichgewichtslage existieren können.

Oben zeigten wir, daß, wenn p Pendel nach unten und q Pendel nach oben gerichtet sind ($p + q = n$), die charakteristische Gleichung (27) nicht nur rein imaginäre, sondern auch reelle und komplexe Wurzeln besitzen kann.

Wenn die Anzahl der nicht rein imaginären Wurzeln $2h$ ist, so haben h Wurzeln davon negative reelle Teile. Folglich kann man erwarten, daß in der Nähe der instabilen Gleichgewichtslage asymptotische Lösungen vorhanden sind, welche von h willkürlichen Konstanten abhängen. Um diese

[5]) Wenn die Anzahl der Pendel ungerade ist, können die Längen und die Massen der Pendel vermutlich so gewählt werden, daß die Gleichung (32) keine einzige reelle negative Wurzel zuläßt. Wenigstens beim System von drei Pendeln konnte ich das einwandfrei feststellen.

Vermutung zu bestätigen, ist es bequemer, gar nicht den Parameter λ einzuführen, sondern die Rechnung direkt an die ursprünglichen Gleichungen (6) anzuschließen. Diese gehen durch die Substitution

$$\varphi_{rp} \to \varphi_{rp}, \quad \varphi_{rq} \to \pi + \varphi_{rq}$$

über in

$$(33)\quad \varepsilon_\nu B_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} \varepsilon_k b_k [\cos(\varphi_\nu - \varphi_k)\cdot \varphi_k'' + \sin(\varphi_\nu - \psi_k)\cdot \varphi_k'^2] + (A_\nu + J_\nu)\varphi_\nu''$$

$$+ \varepsilon_\nu b_\nu \sum_{k=\nu+1}^{n} \varepsilon_k B_k [\cos(\varphi_\nu - \varphi_k)\cdot \varphi_k'' + \sin(\varphi_\nu - \varphi_k)\cdot \varphi_k'^2] = -\varepsilon_k g B_\nu \sin\varphi_\nu,$$

wobei wieder $\varepsilon_{rp} = 1$, $\varepsilon_{rq} = -1$.

Das System (33) unterscheidet sich von (6) nur dadurch, daß die Größen b_ν, B_ν durch $\varepsilon_\nu b_\nu$, $\varepsilon_\nu B_\nu$ ersetzt sind.

Nun benutzen wir den folgenden Satz von Perron[6]):

Wenn in dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{\nu k} x_k + f_\nu(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

die Funktionen f_ν die Bedingungen A und B erfüllen und wenn die Wurzeln ϱ_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_n - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

alle oder zum Teil einen negativen reellen Teil haben, so gibt es zu jedem Index l, für den $\Re(\varrho_l) < 0$ ist, Integralsysteme, für welche

$$\overline{\lim_{t}} \frac{\lg(|x_1| + \ldots + |x_n|)}{t} = \Re(\varrho_l), \quad \text{also} \quad \lim_{x\to\infty} x_1 = 0, \ \ldots, \ \lim_{x\to\infty} x_n = 0,$$

und zwar bilden diejenigen, für welche

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\lg(|x_1| + \ldots + |x_n|)}{t} \leqq -r < 0$$

ist, eine Schar mit genau h_1 willkürlichen Konstanten, wo h_1 die Anzahl derjenigen charakteristischen Wurzeln ϱ_ν bezeichnet, für die $\Re(\varrho_\nu) \leqq -r$ ist[7]). Dabei sind auch mehrfache Wurzeln zugelassen und ihrer Vielfachheit entsprechend zu zählen.

---

[6]) Perron, Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen, Math. Zeitschr. 29 (1929), S. 129, speziell Satz 11.

[7]) Nach Lettenmeyer ist sogar der Limes schlechthin stets vorhanden, so daß lim statt $\overline{\lim}$ gesetzt werden kann. Vgl. Lettenmeyer: Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von Differentialgleichungen und Differentialgleichungssystemen, Sitzungsber. der bayer. Akad. d. Wiss., math.-nat. Abteilung 1929, S. 201, speziell Satz 3.

Die Bedingung A ist erfüllt, wenn die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n, t)$ in einem Bereich der Gestalt

$$|x_1| \leqq a, \ldots, |x_n| \leqq a, t \geqq 0,$$

wo natürlich $a > 0$ ist, definiert und stetig ist und wenn sie daselbst der Ungleichung

$$|f(x_1, \ldots, x_n, t)| \leqq k(|x_1| + \ldots + |x_n|)$$

genügt, wo k eine positive Konstante ist.

Die Bedingung B ist erfüllt, wenn die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n, t)$ so beschaffen ist, daß jeder positiven Zahl ε zwei positive Zahlen δ_ε und T_ε zugeordnet werden können derart, daß für

$$|x_1'| \leqq \delta_\varepsilon, |x_1''| \leqq \delta_\varepsilon, \ldots, |x_n'| \leqq \delta_\varepsilon, |x_n''| \leqq \delta_\varepsilon, t \geqq T_\varepsilon$$

stets die Ungleichung

$$|f(x_1', \ldots, x_n', t) - f(x_1'', \ldots, x_n'', t)| \leqq \varepsilon(|x_1' - x_1''| + \ldots + |x_n' - x_n''|)$$

gilt.

Um den Perronschen Satz auf das System (33) anwenden zu können, lösen wir dieses nach den zweiten Ableitungen auf. Die dabei auftretende Nennerdeterminante ist speziell für $\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_n = 0$ identisch mit der Determinante, die aus (14) entsteht, wenn man die Zeilen und Spalten der Reihe nach mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ multipliziert. Sie ist also für hinreichend kleine Werte von $|\varphi_1|, \ldots, |\varphi_n|$ von Null verschieden. Daher ist die Auflösung nach den zweiten Ableitungen möglich und die bei der Auflösung entstehenden rechten Seiten lassen sich nach Potenzen von $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_1', \ldots \varphi_n'$ entwickeln. Setzt man noch $\varphi_\nu' = \Phi_\nu$, so nimmt das System schließlich die Form an:

$$(34) \qquad \begin{cases} \Phi_\nu' = \sum_{k=1}^{n} a_{\nu k} \varphi_k + f_\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_n), \\ \varphi_\nu' = \Phi_\nu, \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

wo die $f_\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \Phi_n, \ldots, \Phi_n)$ Potenzreihen von $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$ sind, die mit Gliedern mindestens zweiter Dimension beginnen. Also genügt f_ν den Bedingungen A und B.

Die charakteristische Gleichung lautet:

$$(35) \qquad \begin{vmatrix} -\varrho \ldots 0 & a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots & \\ 0 \ldots -\varrho & a_{n1} \ldots a_{nn} \\ \ldots\ldots\ldots & \\ 1 \ldots 0 & -\varrho \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ 0 \ldots 1 & 0 \ldots -\varrho \end{vmatrix} = 0$$

oder nach trivialer Reduktion:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho^2 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \varrho^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{36}$$

Das ist nun aber in Wahrheit dieselbe Gleichung wie (27), weil das System (26) durch Auflösung nach den zweiten Ableitungen und durch die Substitution $\psi_\nu = \varphi_\nu$, $\psi_\nu' = \Phi_\nu$ gerade in das System (34) mit denselben a_{ik}, aber ohne die Glieder f_ν übergeht.

Auf (33) kann man jetzt den Perronschen Satz (mit $2n$ an Stelle von n) anwenden, wobei man noch den Vorteil hat, daß die f_ν von t unabhängig sind. Er garantiert unmittelbar die Existenz einer Schar asymptotischer Lösungen des Pendelsystems in der Nähe der instabilen Gleichgewichtslage, welche von h Konstanten abhängig ist.

Unter gewissen Voraussetzungen (die nur ausnahmsweise nicht erfüllt sind) läßt sich das asymptotische Verhalten der Lösungen noch genauer beschreiben. Wir unterscheiden dabei zwei Fälle:

Fall A. Sind $\varrho_1, \dots, \varrho_h$ charakteristische Wurzeln mit negativem reellen Teil (es brauchen nicht alle zu sein, im Gegensatz zu der Bedeutung von h auf S. 194), so werde vorausgesetzt, daß

$$p_1 \varrho_1 + \dots + p_h \varrho_h \neq \varrho_\nu \qquad (\nu = 1, \dots, h), \tag{37}$$

$$p_1 \varrho_1 + \dots + p_h \varrho_h \neq \varrho_k \qquad (k = h+1, \dots, 2n) \tag{37a}$$

ist für jedes System ganzer nicht negativer Zahlen p_ν, deren Summe $\geqq 2$ ist.

Bezeichnet man von den Wurzeln $\varrho_1, \dots, \varrho_h$ speziell die reellen negativen mit $-\xi_k$ $(k = 1, \dots, g)$ und die komplexen mit negativen reellen Teilen mit $-\xi_k \pm i\eta_k$ $\left(k = g+1, \dots, \frac{h+g}{2}\right)$, dann lassen sich nach Picard[8]) die Lösungen in folgender Gestalt:

$$\begin{cases} \varphi_{r_\varrho} = \sum\limits_{k=1}^{g} L_{r_\varrho k} C_k e^{-\xi_k t} + \sum\limits_{k=g+1}^{\frac{h+g}{2}} L_{r_\varrho k} (C_k \cos \eta_k t + D_k \sin \eta_k t) e^{-\xi_k t} + F_{r_\varrho}, \\ \varphi_{r_q} = \pi + \sum\limits_{k=1}^{g} L_{r_q k} C_k e^{-\xi_k t} + \sum\limits_{k=g+1}^{\frac{h+g}{2}} L_{r_q k} (C_k \cos \eta_k t + D_k \sin \eta_k t) e^{-\xi_k t} + F_{r_q} \end{cases} \tag{38}$$

darstellen, wo r_ϱ und r_q entsprechend p bzw. q $(p+q=n)$ verschiedene Werte annehmen und F_ν Potenzentwicklungen nach

$$C_1 e^{-\xi_1 t}, \dots, C_{g+1} \cos \eta_{g+1} t\, e^{-\xi_{g+1} t}, \dots, D_{g+1} \sin \eta_{g+1} t\, e^{-\xi_{g+1} t}, \dots$$

sind, die mit Gliedern mindestens zweiter Dimension beginnen.

---

[8]) Picard, Traité d'Analyse, Bd. III, II. édition S. 187.

Wenn in der zweiten Summe der Gleichungen (38) alle Konstanten C_k und D_k durch Null ersetzt werden, bekommen wir eine von g Konstanten abhängige Schar von Lösungen, bei welchen das Pendelsystem für $t \to \infty$ sich der instabilen Gleichgewichtslage nähert, indem jedes Pendel immer auf der gleichen Seite seiner Vertikalen bleibt und die Bewegung dauernd gegen die Vertikale hin gerichtet bleibt.

Dagegen wenn die zweite Summe wenigstens ein Glied hat, so nähert sich das Pendelsystem zwar ebenfalls asymptotisch der instabilen Gleichgewichtslage. Die Pendel führen dabei aber Zitterbewegungen aus, indem sie sich zeitweise gegen die Vertikale hin, zeitweise auch von ihr weg bewegen. Wenn jedes ξ_k der zweiten Summe größer ist als jedes ξ_k der ersten Summe, so bleiben die Pendel dauernd auf der gleichen Seite ihrer Vertikalen; wenn aber ein ξ_k der zweiten Summe kleiner ist als jedes ξ_k der ersten Summe, so entstehen gedämpfte Schwingungen um die Vertikale.

Fall B. Wenn die reellen Teile der charakteristischen Wurzeln alle voneinander verschieden sind, dann kann man aus Satz 12 der erwähnten Arbeit von Perron entnehmen[9]), daß es zu jeder Wurzel ϱ_k mit negativem reellem Teil eine Schar von Lösungen gibt, für die

$$(39) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{t \to \infty} \varphi_\nu'(t) = 0 & (\nu = 1, \ldots, n), \\ \lim\limits_{t \to \infty} (\varphi_1 : \varphi_2 : \ldots : \varphi_n) = L_{1k} : L_{2k} : \ldots : L_{nk}. \end{cases}$$

Die Anzahl der willkürlichen Konstanten dieser Schar ist gleich der Anzahl derjenigen charakteristischen Wurzeln, deren reeller Teil $\leqq \Re(\varrho_k)$ ist.

§ 6.

Spezialfall $n = 2$.

Wir wollen auch hier speziell $n = 2$ untersuchen und uns der Einfachheit halber auf den Fall des mathematischen Pendels beschränken.

a) *Alle zwei Pendel bleiben nach oben gerichtet.*

Die Gleichung (30) lautet dann, wenn man in jeder Zeile die gemeinsamen Faktoren unterdrückt,

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)(a_1 - u) & a_2 m_2 \\ a_1 & a_2 - u \end{vmatrix} = 0.$$

Die Wurzeln sind

$$u_1 = \frac{a_1 + a_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2},$$

$$u_2 = \frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2},$$

[9]) Für die Anwendung von Satz 12 ist zunächst eine lineare Transformation erforderlich.

also $u_1 > u_2 > 0$. Die charakteristische Gleichung hat nur reelle Wurzeln, von denen zwei negativ sind:

$$-\xi_1 = -\sqrt{\frac{g}{u_1}}, \quad -\xi_2 = -\sqrt{\frac{g}{u_2}} \qquad (-\xi_2 < -\xi_1).$$

Daraus folgt, daß hier eine Schar *reiner* asymptotischer Bewegungen existiert, welche von zwei Konstanten abhängig ist, indem jedes Pendel bei diesen Bewegungen immer auf der gleichen Seite seiner Vertikalen bleibt. Hier existiert keine einzige periodische Lösung.

Wir wollen nun für $t \to \infty$ das Verhältnis der Abweichungen der beiden Pendel von ihrer Vertikalen φ_1^∞, φ_2^∞ und von der Gleichgewichtslage s_1^∞, s_2^∞ genauer untersuchen, wobei wir die bei Fall B, Seite 198 angeführten Tatsachen benutzen.

Hier ist

$$L_{1\mu} = a_2 - u_\mu, \quad L_{2\mu} = -a_1 \qquad (\mu = 1, 2),$$

wobei wir einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor wieder unterdrückt haben.

α) Schar asymptotischer Bewegung abhängig von ξ_1.

Da $-\xi_1$ die größere der beiden negativen Wurzeln ist, enthält die zugehörige Schar zwei willkürliche Konstanten.

Nach (39) erhalten wir für den Quotienten der Winkel, welche für $t \to \infty$ die beiden Pendel mit der negativen J-Achse bilden, folgende Ungleichungen:

$$\frac{\varphi_1^\infty}{\varphi_2^\infty} = \lim_{t\to\infty} \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} = \frac{u_1 - a_2}{a_1}$$

$$= \frac{\frac{a_1 - a_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2}}{a_1} \begin{cases} < 1, \\ > 0. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen zeigen, daß die beiden Pendel auf der gleichen Seite ihrer Vertikalen liegen.

Außerdem ist

$$|\varphi_1^\infty| < |\varphi_2^\infty| \quad \text{(Fig. 3)}.$$

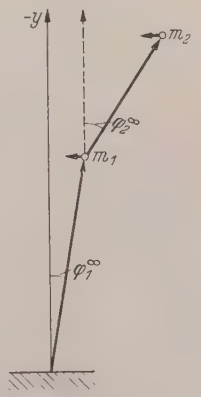

Fig. 3.

Wenn noch ξ_2 kein Multiplum von ξ_1 ist, lassen sich nach (38) die Winkel φ_1, φ_2 durch folgende Formel

$$\varphi_1(t) = C_1(a_2 - u_1)\, e^{-\xi_1 t} + C_2(a_2 - u_2)\, e^{-\xi_2 t} + F_1(C_1 e^{-\xi_1 t}, C_2 e^{-\xi_2 t}),$$
$$\varphi_2(t) = -C_1 a_1 e^{-\xi_1 t} - C_2 a_1 e^{-\xi_2 t} + F_2(C_1 e^{-\xi_1 t}, C_2 e^{-\xi_2 t})$$

ausdrücken, wo die $F_r(C_1 e^{-\xi_1 t}, C_2 e^{-\xi_2 t})$ wieder Potenzreihen sind, die mit Gliedern mindestens zweiter Dimension beginnen.

β) Schar asymptotischer Bewegung abhängig von ξ_2.

Da $-\xi_2$ die kleinste negative Wurzel ist, enthält die zugehörige Schar nur *eine* willkürliche Konstante.

Hier ist

$$\frac{\varphi_1^\infty}{\varphi_2^\infty} = \frac{u_2 - a_2}{a_1} = \frac{\frac{a_1 - a_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2}}{a_1} \begin{cases} > -\frac{a_2}{a_1}, \\ < 0. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen zeigen, daß die beiden Pendel sich auf entgegengesetzten Seiten ihrer Vertikalen befinden. Wenn $a_1 > a_2$, dann ist stets $|\varphi_1^\infty| < |\varphi_2^\infty|$. Für $a_1 < a_2$ sind dagegen die beiden Fälle $|\varphi_1^\infty| \gtrless |\varphi_2^\infty|$ möglich.

Um zu sehen, welche Lage die beiden Pendel gegen die instabile Gleichgewichtslage haben, müssen wir den Quotienten $\frac{a_1 \varphi_1^\infty}{a_1 \varphi_1^\infty + a_2 \varphi_2^\infty}$ untersuchen.

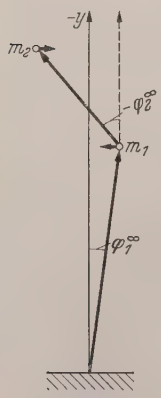

Fig. 4

Er ist gleich

$$\frac{u_2 - a_2}{u_2}, \quad \text{also} \quad < 0,$$

weil $u_2 > 0$ und

$$u_2 - a_2 = \frac{a_1 - a_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2} < 0.$$

Das besagt, daß die beiden Pendel sich von entgegengesetzten Seiten der Gleichgewichtslage nähern (Fig. 4).

Diesmal lassen sich nach (38) die Winkel φ_1, φ_2 durch folgende Formel

$$\varphi_1(t) = C_2 (a_2 - u_2)\, e^{-\xi_2 t} + F_1 (C_2 e^{-\xi_2 t}),$$
$$\varphi_2(t) = -C_2 a_1 e^{-\xi_2 t} + F_2 (C_2 e^{-\xi_2 t})$$

ausdrücken, weil bei diesem Fall die Bedingungen (37) und (37a) erfüllt sind.

b) *Ein Pendel nach unten, das andere Pendel nach oben.*

1. Erstes Pendel nach unten.

Die Gleichung (32) lautet jetzt

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)(a_1 + u) & a_2 m_2 \\ a_1 & a_2 - u \end{vmatrix} = 0.$$

Die Wurzeln sind

$$u_1 = -\frac{a_1 - a_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2},$$

$$u_2 = -\frac{a_1 - a_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2},$$

also $u_1 > 0$, $u_2 < 0$. Die charakteristische Gleichung hat also eine negative Wurzel $\varrho_1 = -\xi_1 = -\sqrt{\frac{g}{u_1}}$ und ein Paar rein imaginärer Wurzeln $\pm i\varrho_2 = \pm\sqrt{\frac{g}{-u_2}}$.

Außerdem ist

$$L_{1\mu} = a_2 - u_\mu, \quad L_{2\mu} = -a_1 \qquad (\mu = 1, 2),$$

wobei wir einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor wieder unterdrückt haben.

α) Schar asymptotischer Bewegungen abhängig von u_1.

Hier können wir das bei Fall B Gesagte nicht benutzen, weil die reellen Teile teilweise einander gleich, nämlich gleich Null sind. Dagegen führt der in Fall A angegebene Picardsche Satz zum Ziel, und zwar zeigt die negative Wurzel an, daß wir eine Schar von *rein* asymptotischen Bewegungen haben werden, welche von einer Konstanten abhängig ist, d. h. solche Bewegungen, bei welchen jedes Pendel immer auf der gleichen Seite seiner Vertikalen bleibt.

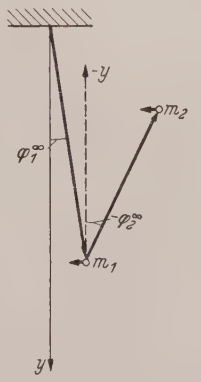

Fig. 5.

Nach (38) ist

$$\varphi_1(t) = C_1(a_2 - u_1)\, e^{-\xi_1 t} + F_1(C_1 e^{-\xi_1 t}),$$
$$\varphi_2(t) = -C_1 a_1\, e^{-\xi_1 t} + F_2(C_1 e^{-\xi_1 t}).$$

Daher erhalten wir die Ungleichungen

$$\frac{\varphi_1^\infty}{\varphi_2^\infty} = \frac{u_1 - a_2}{a_1} = \frac{-\frac{a_1 + a_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2}}{a_1} \quad \begin{cases} < 0, \\ > -1. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen zeigen, daß die beiden Pendel nach der gleichen Seite von ihren Vertikalen abweichen.

Außerdem ist

$$|\varphi_1^\infty| < |\varphi_2^\infty| \quad \text{(Fig. 5)}.$$

β) Schar periodischer Bewegungen abhängig von u_2.

Das rein imaginäre Wurzelpaar $\pm i\varrho_2$ hat zur Folge, daß eine einparametrige Schar periodischer Bewegungen existiert, weil $-\frac{\varrho_1}{i\varrho_2}$ imaginär, also keine ganze Zahl ist.

Wir wollen jetzt untersuchen, bei welchem Verhältnis der beiden Winkelgeschwindigkeiten $\varphi_1'(0) = \lambda\, \psi_1'(0)$ und $\varphi_2'(0) = \lambda\, \psi_2'(0)$ periodische Bewegungen stattfinden.

Hier ist nach (29)

$$\psi_1'(0) = (a_2 - u_2)\,\varrho_2 + (a_2 - u_1)\,\varrho_1\alpha_1,$$
$$\psi_2'(0) = -a_1\varrho_2 - a_1\varrho_1\alpha_1.$$

Da aber α_1 mit λ zugleich gegen Null geht, so ist

$$\varphi_1'(0) = \lambda\,\psi_1'(0) = \lambda\,(a_2 - u_2)\,\varrho_2 + o(\lambda),$$
$$\psi_2'(0) = \lambda\,\psi_2'(0) = -\lambda\,\alpha_1\,\varrho_2 + o(\lambda).$$

Dann erhalten wir folgende Ungleichungen:

$$\frac{\varphi_1^0}{\varphi_2^\pi} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda\,\psi_1'(0)}{\lambda\,\psi_2'(0)} = -\frac{a_2 - u_2}{a_1} = -\frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,a_1 a_2}}{a_1}$$
$$\begin{cases} < -1, \\ > -\dfrac{a_1 + a_2}{a_1}. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen zeigen, daß die beiden Pendel nach der gleichen Seite aus der Vertikalen herausgehen. Außerdem ist

$$|\varphi_1^0| > |\varphi_2^\pi|, \quad |\varphi_1^0| < \frac{a_1 + a_2}{a_1}\,|\varphi_2^\pi|.$$

Die Lage ist also wie in Fig. 5, nur daß hier $|\varphi_1^0| > |\varphi_2^\pi|$.

2. Erstes Pendel nach oben.

Die Gleichung (30) lautet diesmal

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)\,(a_1 - u_1) & a_2 m_2 \\ a_1 & a_2 + u \end{vmatrix} = 0.$$

Die Wurzeln sind

$$u_1 = -\frac{a_2 - a_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_2 - a_1}{2}\right)^2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,a_1 a_2},$$
$$u_2 = -\frac{a_2 - a_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_2 - a_1}{2}\right)^2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,a_1 a_2},$$

also $u_1 > 0$, $u_2 < 0$. Die charakteristische Gleichung hat wieder eine negative Wurzel $\varrho_1 = -\xi_1 = -\sqrt{\frac{g}{u_1}}$ und ein Paar rein imaginärer Wurzeln $\pm i\varrho_2 = \pm\sqrt{\frac{g}{u_2}}$.

Außerdem ist

$$L_{1\mu} = a_2 + u_\mu, \quad L_{2\mu} = -a_1 \qquad (\mu = 1, 2).$$

α) *Schar asymptotischer Bewegungen abhängig von* u_1.

Die negative Wurzel ϱ_1 beweist, daß wir eine Schar von rein asymptotischen Bewegungen haben, welche von einer Konstanten abhängig ist.

In derselben Weise wie in 1., α) erhalten wir

$$\frac{\varphi_1^\infty}{\varphi_2^\infty} = -\frac{a_2 + u_1}{a_1} \begin{cases} > -\frac{a_1 + a_2}{2}, \\ < -1. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen zeigen, daß die beiden Pendel nach der gleichen Seite von ihrer Vertikalen abweichen; außerdem ist

$$|\varphi_1^\infty| > |\varphi_2^\infty|,$$
$$|\varphi_1^\infty| < \frac{a_1 + a_2}{a_1} |\varphi_2^\infty| \quad \text{(Fig. 6).}$$

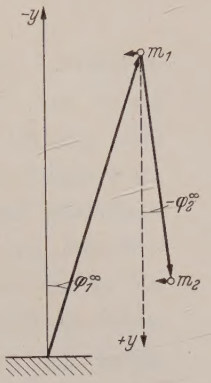

Fig. 6.

β) Schar periodischer Bewegungen abhängig von u_2.

Das rein imaginäre Wurzelpaar $\pm i\varrho_2$ beweist, daß gewiß eine Schar periodischer Bewegungen existiert, welche von einem Parameter abhängt, weil $\frac{-\varrho_1}{i\varrho_2}$ imaginär, also nicht ganzzahlig ist.

In derselben Weise wie in 1.*, β) erhalten wir hier

$$\frac{\varphi_1^\pi}{\varphi_2^0} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda\, \psi_1'(0)}{\lambda\, \psi_2'(0)} = -\frac{a_2 + u_2}{a_1} \begin{cases} < 0, \\ > -1. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen zeigen, daß die beiden Pendel nach der gleichen Seite aus der Vertikalen herausgehen, d. h. die Winkel φ_1^π und φ_1^0 sind entgegengesetzt und

$$|\varphi_1^\pi| < |\varphi_2^0|.$$

Die Figur ist hier dieselbe wie Fig. 6, nur daß $|\varphi_1^\pi| < |\varphi_2^0|$ ist.

Lebenslauf

Ich, Georgi Bradistilov, bin als Sohn des Abteilungschefs des Finanzministeriums Delscho Bradistilov und seiner Ehefrau Nona Bradistilova, geb. Motekova, am 12. Oktober 1905 in Panagjarischte (Bulgarien) geboren. Ich bin von bulgarischer Staatsangehörigkeit, bulgarischer Nationalität und christlich-orthodoxer Religion. Ich habe die Volksschule und das Progymnasium in Sofia besucht. Im Jahre 1918 trat ich in das Staatsgymnasium in Sofia ein, wo ich im Jahre 1923 die Reifeprüfung mit Erfolg bestand. Im Wintersemester 1923 wurde ich an der Universität Sofia immatrikuliert, wo ich Mathematik und Physik studierte. Im Juni 1937 bestand ich mit Erfolg das Diplomexamen. Ab November 1927 bis jetzt bin ich als Assistent am Mathematischen Institut der Universität in Sofia tätig. Während der Schuljahre 1931/32 und 1937/38 war ich von der Universität Sofia für weitere Studien nach Paris bzw. München geschickt worden.

Zum Schluß möchte ich noch meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Geheimrat Professor Dr. Perron, für die wertvollen Anregungen und Ratschläge, die er mir bei der Ausarbeitung der vorliegenden Dissertation erteilte, meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Druck von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Printed in Germany